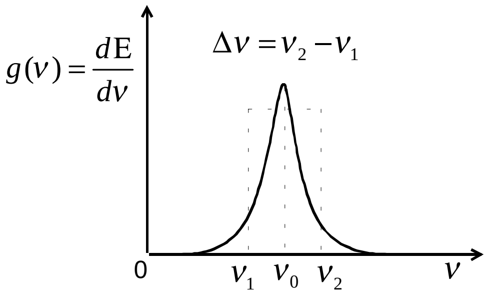
-EXERCICE 30.2-

• ENONCE :

« Cohérence temporelle »



On reprend le montage des fentes d'Young avec des fentes (source et secondaires) infiniment fines. Les notations sont celles de l'exercice 30.1.
La radiation émise par la source n'est pas parfaitement monochromatique: pour simplifier les calculs, on assimile le profil spectral à un rectangle, de même surface que le profil réel.
Déterminer l'éclairement de l'écran (E), en faisant apparaître un facteur de visibilité des franges.

Rq : la fonction $g(\nu)$ représente la « densité spectrale » de la source ; $d\mathrm{E}=g(\nu)d\nu$ représente la contribution de la bande de fréquence $d\nu$ à l'éclairement total de la source.

Commenter le résultat, en s'intéressant en particulier à la valeur de x qui annule le facteur de visibilité pour la première fois.

• CORRIGE :

« Cohérence temporelle »

♦ Calcul :

• Une condition nécessaire (mais non suffisante) pour que le déphasage entre deux ondes soit constant au cours du temps est que ces deux ondes aient la même fréquence : les sources correspondant à des bandes de fréquences $d\nu$ différentes sont donc **incohérentes** entre elles, et l'on peut se contenter de sommer les éclairements sur l'écran qui leur correspondent.

• Pour chaque source élémentaire, il y a interférence à travers les 2 fentes secondaires (S_1) et (S_2), on peut donc écrire pour chaque source de largeur spectrale $d\nu$:

$$d\mathrm{E}(x) = K[1+\cos(\frac{2\pi ax}{\lambda D})]d\nu = K[1+\cos(\frac{2\pi ax\nu}{cD})]d\nu$$ (avec $\lambda = \frac{c}{\nu}$) ; d'où, en intégrant :

$$\mathrm{E}(x) = \int_{\nu_1}^{\nu_2} K[1+\cos(\frac{2\pi ax}{cD}\nu)d\nu = K(\nu_2-\nu_1)\{1+\frac{cD}{2\pi ax(\nu_2-\nu_1)}[\sin(\frac{2\pi ax}{cD}\nu_2)-\sin(\frac{2\pi ax}{cD}\nu_1)]\} \Rightarrow$$

$$\boxed{\mathrm{E}(x) = 2\mathrm{E}_0\{1+\frac{\sin u}{u}\times\cos[\frac{2\pi a}{cD}(\frac{\nu_1+\nu_2}{2})]\} = 2\mathrm{E}_0[1+\frac{\sin u}{u}\times\cos(\frac{2\pi ax}{\lambda_0 D})] = 2\mathrm{E}_0[1+V(u)\times\cos(\frac{2\pi ax}{\lambda_0 D})]}$$

avec : $\boxed{2\mathrm{E}_0 = K(\nu_2-\nu_1)}$ $\boxed{u = \frac{\pi ax(\nu_2-\nu_1)}{cD} = \frac{\pi ax\Delta\nu}{cD}}$ $\boxed{\lambda_0 = \frac{c}{\nu_0} = \frac{2c}{\nu_1+\nu_2}}$

Rq1 : E_0 est l'éclairement de l'écran lorsqu'une seule fente secondaire est ouverte **et** que la radiation est vraiment monochromatique.

Rq2 : on peut remarquer qu'avec $\lambda_1 = \frac{c}{\nu_1}$ et $\lambda_2 = \frac{c}{\nu_2}$, il vient :

$$\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2} = \frac{c}{2}(\frac{1}{\nu_1}+\frac{1}{\nu_2}) = c\frac{(\nu_1+\nu_2)/2}{\nu_1\nu_2} = c\frac{\nu_0}{(\nu_0-\Delta\nu)(\nu_0+\Delta\nu)} = c\frac{\nu_0}{\nu_0^2-(\Delta\nu)^2} \simeq \frac{c}{\nu_0} = \lambda_0 \quad (\Delta\nu \ll \nu_0)$$

♦ Commentaires :

• C'est bien le terme en $\frac{\sin u}{u}$ qui « module » le terme en $\cos(\frac{2\pi ax}{\lambda_0 D})$, qui correspond au cas où la radiation est purement monochromatique, de longueur d'onde λ_0.

En effet, $\frac{\sin u}{u}$ s'annule chaque fois que $\frac{\pi ax\Delta\nu}{cD} = p\pi$, donc pour $\Delta_1 x = \frac{cD}{a\Delta\nu}$; le terme en cosinus a, quant à lui, une période spatiale $\Delta_2 x = \frac{\lambda_0 D}{a} = \frac{cD}{a\nu_0} \ll \Delta_1 x$, puisque $\nu_0 \ll \Delta\nu$.

• Encore une fois, le contraste vaut $C = |V(u)|$, et diminue au fur et à mesure que l'on s'éloigne de la frange d'ordre 0 (en x=0).

• La première annulation du contraste correspond à $u = \pi \Rightarrow x_0 = \frac{cD}{a\Delta\nu}$; en faisant apparaître la différence de marche, calculée en x_0, entre les rayons (2) et (1), il vient :

$\delta_{2/1}(x_0) = \dfrac{ax_0}{D}$ $\Rightarrow$ le contraste s'annule pour : $\delta_{2/1}(x_0) = \dfrac{c}{\Delta\nu}$.

En utilisant la notion de train d'onde et en se référant à la transformée de Fourier d'un signal, on sait qu'un train d'onde de durée τ « s'étale » en fréquence sur une largeur $\Delta\nu \approx 1/\tau$, ce qui donne : $\boxed{\delta_{2/1}(x_0) \approx c\tau = L}$, où L est la longueur moyenne d'un train d'onde.

• Ainsi, pour $\delta_{2/1}(x) \succ \delta_{2/1}(x_0)$, donc pour $x \succ x_0$ ou $u \succ \pi$, deux trains d'onde « jumeaux » (issus du même train d'onde émis par la source, c'est-à-dire corrélés) provenant de (S_1) et (S_2) vont se « rater » sur l'écran, et arriver avec des trains d'ondes auxquels ils ne sont pas corrélés ; avec cette perte de cohérence, il n'y aura plus interférence, mais une simple addition des éclairements dus à chaque source secondaire : l'écran sera uniformément éclairé, on ne verra plus de franges.

• Il est clair qu'avec ce modèle, le contraste ne peut réapparaître pour $u \succ \pi$, contrairement à ce que la fonction $V(u) = \sin_c(u)$ suggère ; l'expérience confirmant cette absence de réapparition d'un contraste, et le calcul développé précédemment étant juste, c'est que le modèle d'un profil spectral rectangulaire décrit mal la réalité : des modèles plus précis (profils gaussiens, lorentziens…) conduisent ainsi à des fonctions $V(u)$ qui restent pratiquement nulles pour $u \succ \pi$.

On insistera sur le fait que le modèle simpliste du profil rectangulaire justifie néanmoins l'annulation du contraste pour $u \approx \pi$.

Rq : τ est la « durée de cohérence » du train d'onde, et L est sa « longueur de cohérence ».